ECOLES NORMALES SUPERIEURES

CONCOURS D'ADMISSION 2021

VENDREDI 16 AVRIL 2021
14h00 - 18h00

FILIERE MP - Epreuve n° 10

INFO-MATHEMATIQUES (ULCR)

Durée : 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

Représentation des fonctions booléennes par diagrammes de décision

Le sujet comporte 14 pages, numérotées de 1 à 14.

Début de l'épreuve.

Dans ce sujet, on considère des structures de données permettant de représenter, de façon compacte, une fonction booléenne (c'est-à-dire, une fonction à valeur booléenne et ayant pour argument une assignation de valeurs booléennes à des variables). Le but est de pouvoir analyser efficacement cette fonction booléenne. Nous nous intéresserons principalement à une structure de données en particulier : les diagrammes de décision binaires ordonnés. Ce sujet est constitué de six parties qui peuvent être traitées relativement indépendamment ; cependant, les concepts introduits dans une partie peuvent être réutilisés dans des parties ultérieures.

— La première partie (page 3) traite de questions élémentaires sur les fonctions booléennes et de leurs représentations usuelles, les formules de la logique propositionnelle.
— La deuxième partie (page 4) présente les arbres de décision et les diagrammes de décision et contient des questions permettant de se familiariser avec ces structures de données.
— La troisième partie (page 7) traite des liens entre les diagrammes de décision et les automates finis.
— La quatrième partie (page 9) s'intéresse à la mise au point d'algorithmes permettant de manipuler et d'analyser les diagrammes de décision.
— La cinquième partie (page 10) présente différentes méthodes pour prouver qu'une famille de fonctions booléennes n'admet pas de petites représentations sous forme de diagramme de décision.
— La sixième partie (page 12) étudie une généralisation des diagrammes de décision binaires ordonnés.

Notations et définitions

- Pour un entier n strictement positif, on note $[n] = \{i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Pour un ensemble fini X de taille n, un *ordre* π *sur* X est une fonction bijective de X dans $[n]$. On note S_X l'ensemble des ordres de X.
- La partie entière supérieure (respectivement, inférieure) d'un nombre réel r est notée $\lceil r \rceil$ (respectivement, $\lfloor r \rfloor$).
- Étant donné un ensemble fini X, on note $|X|$ la taille de X et $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X.
- Étant donnée une fonction $f\colon X \to Y$ et $y \in Y$, on note $f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$, appelée *l'image inverse de* y *par* f.
- Un *graphe orienté* $G = (V, E)$ est la donnée d'un ensemble fini V et d'un ensemble $E \subseteq V \times V$. Les éléments de V sont appelés les *sommets* du graphe G et les éléments de E sont appelés les *arêtes*. On notera le fait que deux sommets i, j sont reliés par une arête $(i, j) \in E$ par $i \to j$. Un *chemin* $P = (v_1, \ldots, v_k)$ dans le graphe G est une liste de sommets tels que pour tout $1 \leqslant i < k$, on a $v_i \to v_{i+1}$. On dit que P est un chemin *de* v_1 *à* v_k. Un cycle est un chemin $(v_1, \ldots, v_k)$ avec $k \geqslant 2$ et $v_1 = v_k$. Un graphe est *acyclique* s'il ne contient pas de cycle. Pour un sommet $v \in V$, un *voisin sortant* (respectivement, *voisin entrant*) de v est un sommet $w \in V$ tel que $v \to w$ (respectivement, $w \to v$) ; on dit que cette arête *sort de* v (respectivement, *entre en* v). Le *degré sortant* (respectivement, *entrant*) de v est le nombre de ses voisins sortants (respectivement, entrants).
- On représente les valeurs booléennes Faux et Vrai par, respectivement, les entiers 0 et 1.
- Soit X un ensemble fini. Une *assignation* τ des variables X est une fonction de X dans $\{0, 1\}$, l'ensemble des valeurs booléennes. On notera $\{0, 1\}^X$ l'ensemble des assignations des variables X. Une *fonction booléenne* f sur les variables X est une fonction de $\{0, 1\}^X$ dans $\{0, 1\}$. Une assignation $\tau \in \{0, 1\}^X$ *satisfait* f si $f(\tau) = 1$.
- Dans tout le sujet, on suppose qu'on a un ensemble infini dénombrable de variables $\{x_i\}_{i \geqslant 1}$ et on note $X_n = \{x_i\}_{i \leqslant n}$ et Id_n l'ordre sur X_n défini par $\mathsf{Id}_n(x_i) = i$.

Partie I

On considère dans cette partie des formules φ de la *logique propositionnelle* (aussi appelé le *calcul propositionnel*) dont les variables (ou *propositions*) sont dans un certain ensemble X.

Étant donnée une telle formule φ, on définit une fonction booléenne f_φ sur les variables X par induction sur φ pour tout $\tau \in \{0,1\}^X$:

— si $\varphi = 1$ est la formule triviale Vrai, $f_\varphi(\tau) = 1$;
— si $\varphi = 0$ est la formule triviale Faux, $f_\varphi(\tau) = 0$;
— si $\varphi = x$ avec $x \in X$, $f_\varphi(\tau) = \tau(x)$;
— si $\varphi = \neg\varphi'$, $f_\varphi(\tau) = 1 - f_{\varphi'}(\tau)$;
— si $\varphi = \varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_k$, $f_\varphi(\tau) = \max(f_{\varphi_1}(\tau), \ldots, f_{\varphi_k}(\tau))$;
— si $\varphi = \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k$, $f_\varphi(\tau) = \min(f_{\varphi_1}(\tau), \ldots, f_{\varphi_k}(\tau))$.

On dit que φ *représente* f_φ.

Question I.1. On pose $X = X_4$ et $\varphi = x_1 \wedge (x_2 \vee \neg x_4) \wedge (x_3 \vee \neg x_4)$.

a. Quelle est la table de vérité de cette formule ?
b. Déduisez-en les assignations de X_4 pour lesquelles la fonction booléenne f_φ est satisfaite.

Question I.2. Soit τ une assignation des variables X. On considère la fonction booléenne f_τ définie par $f_\tau(\tau) = 1$ et $f_\tau(\tau') = 0$ pour $\tau' \neq \tau$. Justifiez qu'il existe une formule booléenne φ_τ telle que $f_\tau = \varphi_\tau$.

Question I.3. Soit f une fonction booléenne arbitraire sur les variables X_n.

a. Montrez qu'il existe une formule booléenne φ_f telle que $f = f_{\varphi_f}$.
b. Donnez, en fonction de n, une borne supérieure sur le nombre total d'occurrences de variables de X_n dans φ_f.

Partie II

On va s'intéresser dans le reste du sujet à des représentations des fonctions booléennes par des graphes. Le but est d'obtenir des représentations qui sont plus compactes que les tables de vérité ou les formules de la logique propositionnelle. Nous nous intéresserons aux *arbres de décision binaire ordonnés* ainsi qu'aux *diagrammes de décision binaires ordonnés.*

Un *diagramme* $D = (V, E, L, \ell)$ est un graphe orienté acyclique $G = (V, E)$ avec un unique sommet de degré entrant 0 appelé la *racine*, un ensemble fini L de symboles et une fonction d'étiquetage $\ell : E \cup V \to L \cup \{0, 1\}$ des sommets et des arêtes de G.

Un *sommet de décision v de D* est un sommet $v \in V$ tel que $\ell(v) \notin \{0, 1\}$ et de degré sortant 2. Les deux arêtes sortantes de v, e_0 et e_1, vérifient $\ell(e_0) = 0$ et $\ell(e_1) = 1$.

Un *sommet terminal v de D* est un sommet $v \in V$ de degré sortant 0 et tel que $\ell(v) \in \{0, 1\}$.

Soit X un ensemble fini et π un ordre sur X. Un *π-diagramme de décision binaire ordonné sur les variables X* est un diagramme $D = (V, E, X, \ell)$ tel que :

— Tous les sommets de D sont soit des sommets de décision soit des sommets terminaux.

— Si v et w sont deux sommets de décision distincts tels qu'il existe un chemin de v à w dans G alors on a $\pi(\ell(v)) < \pi(\ell(w))$.

Pour un tel π-diagramme de décision binaire ordonné G, soit $P = (v_1, \ldots, v_k)$ un chemin dans G. On note $X_P = \{\ell(v_i) \mid i \leqslant k\} \cap X$ l'ensemble des variables apparaissant sur les étiquettes de P. Soit $Z \supseteq X_P$ et $\tau \in \{0, 1\}^Z$. On dit que P est *compatible* avec τ si et seulement si pour tout i tel que $1 \leqslant i < k$, on a $\tau(\ell(v_i)) = \ell((v_i, v_{i+1}))$. On dit que G *accepte* $\tau \in \{0, 1\}^X$ s'il existe un chemin dans G compatible avec τ qui va de la racine de G vers un sommet terminal étiqueté par 1. La *fonction booléenne $f_G : \{0, 1\}^X \to \{0, 1\}$ représentée par G* est définie par $f_G(\tau) = 1$ si et seulement si G accepte τ.

La *taille* de G, notée $|G|$, est le nombre de sommets de décision qu'il contient.

Un *diagramme de décision binaire ordonné* sur les variables X est un diagramme D tel qu'il existe un ordre π de X tel que D est un π-diagramme de décision binaire ordonné.

Un *π-arbre de décision binaire ordonné* (respectivement *arbre de décision binaire ordonné*) est un *π-diagramme de décision binaire ordonné* (respectivement *diagramme de décision binaire ordonné*) tel que tous les sommets de décision sont de degré entrant au plus 1.

Dans le reste du sujet, on utilisera les notations :

— π-DDBO pour π-diagramme de décision binaire ordonné et π-ADBO pour π-arbre de décision binaire ordonné.

— DDBO pour diagramme de décision binaire ordonné et ADBO pour arbre de décision binaire ordonné.

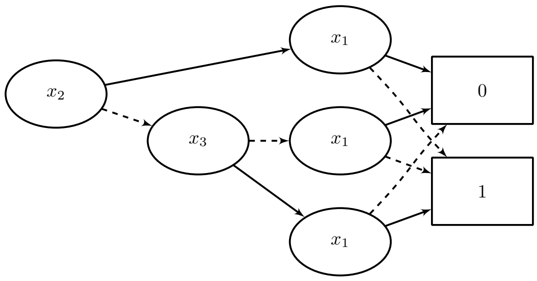

FIGURE 1 – Un ADBO où les arêtes avec étiquette 0 sont représentées en pointillés

Un exemple d'ADBO est donné en figure 1. Dans tout le sujet, nous adoptons les conventions de dessin suivantes : nous représentons les sommets terminaux par des carrés avec leur étiquette au centre et les sommets de décision par des ellipses avec leur étiquette au centre. L'arête sortant d'un sommet de décision étiquetée par 0 est représentée par une ligne pointillée, l'autre par une ligne pleine. Ces conventions devront également être suivies dans votre composition.

Le but de cette partie de se familiariser avec les DDBO et les ADBO.

Question II.1. Soit $X = \{x, y, z, t\}$ un ensemble de variables. Quatre diagrammes sur les variables X sont représentés sur la figure 2 ci-dessous. Indiquez lesquels sont des DDBO. Justifiez votre réponse.

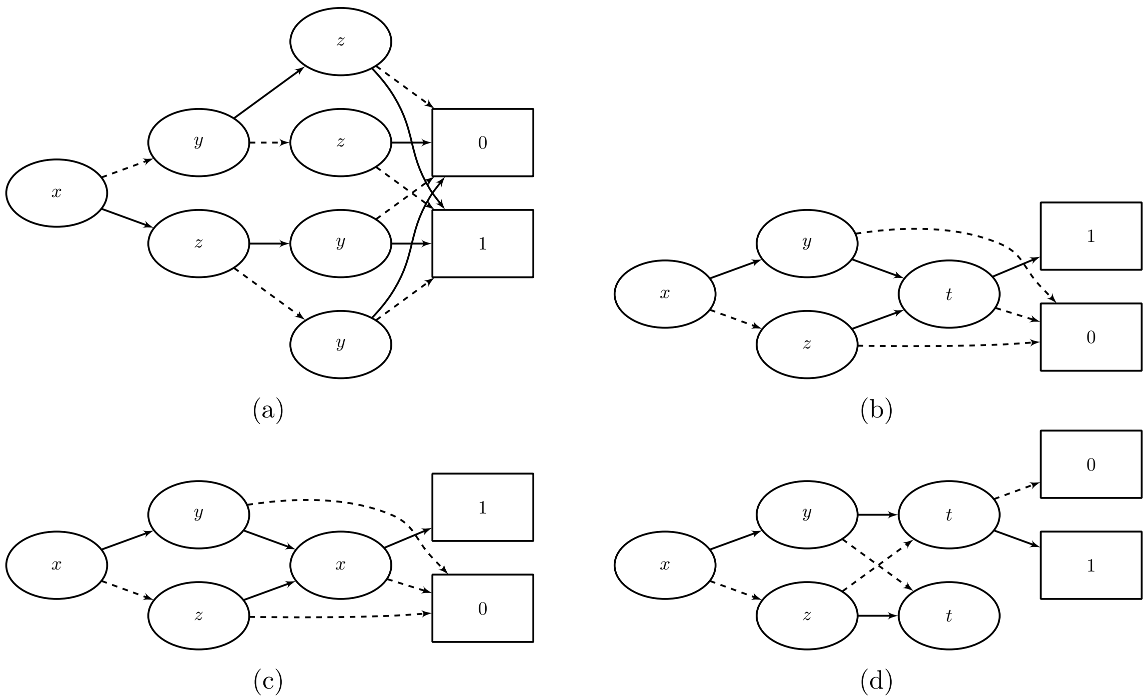

FIGURE 2 – Plusieurs diagrammes

Question II.2. Un ADBO sur les variables X_3 est représenté sur la figure 1.

a. Pour quel ordre π de X_3 cet arbre est-il un π-ADBO ?

b. Pour quelles assignations de X_3 la fonction booléenne f représentée par cet arbre est-elle satisfaite ?

c. Montrez qu'il existe un π-DDBO de taille 4 représentant f.

Question II.3. Dessinez un Id_5-DDBO sur les variables X_5 qui accepte une assignation τ de X_5 si et seulement si τ assigne au moins trois variables distinctes de X_5 à 0.

Question II.4. Soit f une fonction booléenne sur un ensemble fini de variables X. Montrez que pour tout ordre π de X, il existe un π-ADBO représentant f.

Question II.5. Pour un ensemble fini X, on note $\mathsf{PARITÉ}_X$ la fonction booléenne à variables dans X telle que $\mathsf{PARITÉ}_X(\tau) = 1$ si et seulement si $|\tau^{-1}(1)|$ est pair.

a. Donnez un Id_3-ADBO représentant $\mathsf{PARITÉ}_{X_3}$.

b. Soit X un ensemble fini, $\pi \in S_X$ et G un π-ADBO représentant $\mathsf{PARITÉ}_X$. Soit P un chemin de la racine de G à un sommet terminal et $x \in X$. Montrez qu'il existe un sommet de décision v dans P tel que $\ell(v) = x$.

c. Déduisez-en que pour tout ordre $\pi \in S_X$, tout π-ADBO représentant $\mathsf{PARITÉ}_X$ contient au moins $2^{|X|} - 1$ sommets de décision.

d. Montrez que pour tout π et pour tout X fini, il existe un π-DDBO de taille bornée par $2|X| - 1$ représentant $\mathsf{PARITÉ}_X$.

Partie III

Dans cette partie, on s'intéresse aux liens entre les automates finis et les DDBO.

Étant donné un alphabet Σ, on note Σ^* l'ensemble des mots sur Σ, ε le mot vide et, pour $w \in \Sigma^*$, on note $|w|$ la longueur de w. Pour $w_1, w_2 \in \Sigma^*$, on note $w_1 \cdot w_2$ la concaténation de w_1 et de w_2.

On rappelle qu'un automate fini déterministe est un quintuplet $A = (\Sigma, Q, i, F, \delta)$ où Q est un ensemble fini d'états, $i \in Q$ l'état initial, $F \subseteq Q$ un ensemble d'états finals et $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ une fonction de transition.

Étant donné un état $q \in Q$ et un mot w, on définit l'état atteint par w depuis q, noté $\delta^*(q, w)$, récursivement sur la longueur w. Si $w = \varepsilon$ alors $\delta^*(q, w) = q$. Sinon, il existe $w' \in \Sigma^*$ et $a \in \Sigma$ tels que $w = w' \cdot a$ et on définit $\delta^*(q, w) = \delta(\delta^*(q, w'), a)$. Un mot w est accepté par A si $\delta^*(i, w) \in F$. Le langage $L(A)$ accepté par A est l'ensemble des mots acceptés par A.

Soit $L \subseteq \{0,1\}^*$ un langage sur l'alphabet $\{0,1\}$. On note $L_n = \{w \in L \mid |w| = n\}$ et f_n^L la fonction booléenne sur les variables X_n définie par $f_n^L(\tau) = 1$ si et seulement si $\tau(x_1) \dots \tau(x_n) \in L_n$.

Question III.1. Soit L l'ensemble des mots de $\{0,1\}^*$ qui commencent par un 0, finissent par un 1 et contiennent au moins deux 0 et deux 1.

a. Donnez un automate fini déterministe A tel que $L(A) = L$.

b. Donnez un Id_6-DDBO représentant f_6^L.

Question III.2. Soit $L = \{0^k 1^k \mid k \geqslant 1\}$.

a. Montrez que pour tout $n \geqslant 1$, il existe un DDBO de taille au plus n représentant f_n^L.

b. Montrez qu'il n'existe pas d'automate fini A reconnaissant L.

   Indication : On pourra montrer que si $A = (\{0,1\}, Q, i, F, \delta)$ reconnaît L alors la fonction $k \mapsto \delta^*(i, 0^k)$ est injective.

Soit $A = (\Sigma, Q, i, F, \delta)$ un automate fini déterministe sur l'alphabet Σ. Un état q est dit *accessible* dans A s'il existe $w \in \Sigma^*$ tel que $\delta^*(i, w) = q$. Un état q est un *puits* si pour tout $w \in \Sigma^*$, $\delta^*(q, w) \notin F$. Un automate fini A contient une *boucle* s'il existe un état accessible q qui ne soit pas un puits et un mot $w \in \Sigma^*$ tels que $q = \delta^*(q, w)$.

Question III.3. Soit $A = (\Sigma, Q, i, F, \delta)$ un automate fini déterministe sur l'alphabet Σ.

a. Montrez qu'il existe un automate fini déterministe A' dont tous les états sont accessibles, ayant au plus un puits et tel que $L(A) = L(A')$.

b. Montrez que $L(A)$ est fini si et seulement si A ne contient pas de boucle.

Question III.4. Soit $A = (\{0,1\}, Q, i, F, \delta)$ un automate fini déterministe sur l'alphabet $\{0,1\}$ et L le langage accepté par A.

a. Montrez que pour tout $n \geqslant 1$, il existe un automate A_n avec au plus $(n \times |Q| + 1)$ états, tous accessibles, au plus un puits et tel que $L(A_n) = L_n$. Montrez que votre construction de A_n garantit que la propriété suivante est vraie : pour tout état q de A_n qui n'est pas un puits, il existe un entier inférieur ou égal à n, noté $\ell(q)$, tel que pour tout $w \in \{0,1\}^*$ avec $q = \delta^*(i, w)$, on a $|w| = \ell(q)$.

b. Déduisez-en que, pour tout $n \geqslant 1$, il existe un Id_n-DDBO de taille au plus $n \times |Q|$ représentant $f_n^{L(A)}$.

Question III.5. Dans cette question, on fixe un entier k et un alphabet $\Sigma = \{a_0, \cdots, a_{m-1}\}$ de taille $m < 2^k$. Pour un entier $0 \leqslant i < m$, on note $(i)_2$ l'unique mot $b_0 \cdots b_{k-1}$ de $\{0,1\}^k$ tel que $i = \sum_{i=0}^{k-1} b_i 2^i$.

Pour $w = a_{i_1} \cdots a_{i_n} \in \Sigma^*$, on note $(w)_2 = (i_1)_2 \cdot \ldots \cdot (i_n)_2 \in \{0,1\}^*$. Soit $A = (\Sigma, Q, i, F, \delta)$ un automate et $L' = \{(w)_2 \mid w \in L(A)\}$. En montrant que L' est aussi reconnu par un automate fini, prouvez que pour tout n, L'_n est représenté par un DDBO dont la taille est au plus $n \times r$ où r est une valeur qui ne dépend que de $|Q|$ et de m.

Partie IV

Dans cette partie, nous allons mettre au point des algorithmes pour manipuler les DDBO et analyser les fonctions booléennes qu'ils représentent. Soient f et g deux fonctions booléennes sur les variables X. On note $\neg f$ la fonction booléenne sur les variables X définie par $\neg f(\tau) = 1 - f(\tau)$. On note $f \wedge g$ la fonction booléenne sur les variables X définie par $(f \wedge g)(\tau) = \min(f(\tau), g(\tau))$ et par $f \vee g$ la fonction booléenne sur les variables X définie par $(f \vee g)(\tau) = \max(f(\tau), g(\tau))$.

Dans cette partie, on fixe un ensemble de variables X et un ordre π sur X.

Question IV.1. Soit G un π-DDBO sur les variables X.

a. Soit $v, w \in V$ deux sommets de G. Montrez que pour tout $\tau \in \{0,1\}^X$, il existe au plus un chemin de v à w qui soit compatible avec τ.

b. Soit $P = (v_1, \ldots, v_k)$ un chemin de G et $X_P = \{\ell(v_i) \mid i \leqslant k\} \cap X$ l'ensemble des variables qui apparaissent sur les étiquettes des sommets de P. Justifiez qu'il existe $2^{|X|-|X_P|}$ assignations de X compatibles avec P.

Question IV.2. Soit G un π-DDBO sur les variables X. On suppose dans cette question que G a un unique sommet terminal t_1 étiqueté par 1. Pour un sommet de décision $v \in V$ et un sommet $w \in V$ de G, on note $Z^{v,w} = \{x \in X \mid \pi(\ell(v)) \leqslant \pi(x) < \pi(\ell(w))\}$ si w est un sommet de décision et $Z^{v,w} = \{x \in X \mid \pi(\ell(v)) \leqslant \pi(x)\}$ sinon. On définit $f_{v,w}$ la fonction booléenne sur les variables $Z^{v,w}$ telle que $f_{v,w}(\tau) = 1$ si et seulement s'il existe un chemin de v à w compatible avec τ.

a. Montrez que $f_{v,w}$ est représentée par un DDBO dont la taille est inférieure à $|G|$.

b. Soit v un sommet de décision et soient v_0, v_1 ses deux voisins sortants. Donnez une relation entre $|f_{v,t_1}^{-1}(1)|$, $|f_{v_0,t_1}^{-1}(1)|$ et $|f_{v_1,t_1}^{-1}(1)|$.

Question IV.3. Soit G un π-DDBO sur les variables X. Montrez qu'il existe un π-DDBO sur les variables X de la même taille que G représentant $\neg f_G$.

Question IV.4. Soit $G = (V, E, X, \ell)$ et $G' = (V', E', X, \ell')$ deux π-DDBO sur les variables X. Montrez qu'il existe un π-DDBO sur les variables X de taille au plus $|G| \times |G'|$ qui représente $f_G \wedge f_{G'}$.

Partie V

Dans cette partie, on s'intéresse à différentes techniques permettant de montrer que certaines familles de fonctions booléennes ne peuvent pas être représentées par de petits DDBO.

Soit X un ensemble fini et π un ordre sur X. Étant donné une fonction booléenne f sur les variables X, on note $c^\pi(f)$ la taille d'un π-DDBO de taille minimale représentant f. On note $c(f) = \min_{\pi \in S_X} c^\pi(f)$.

On dit qu'une suite de fonctions $F = (f_n)_{n \geqslant 1}$ est représentée par des DDBO de taille polynomiale si et seulement s'il existe un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{R}$ tel que, pour tout n, f_n est une fonction booléenne sur un ensemble de variables X et $c(f_n) \leqslant P(|X|)$.

Le but de cette partie est de montrer qu'il existe des suites de fonctions booléennes qui ne peuvent pas être représentées par des DDBO de taille polynomiale.

Question V.1.

a. Combien y a-t-il de fonctions booléennes distinctes à variables dans X_n ?

b. Montrez qu'il y a au plus $2^{2K^2} \times (n+2)^K$ DDBO sur les variables X_n ayant K sommets, à isomorphisme près.

c. Déduisez-en qu'il existe une suite de fonctions booléennes $(f_n)_{n \geqslant 1}$ qui ne peut pas être représentée par des DDBO de taille polynomiale.

Soit f une fonction booléenne sur les variables X et $Z \subseteq X$. On définit la relation $\equiv_Z^f$ sur $\{0,1\}^Z$ comme suit : $\tau \equiv_Z^f \tau'$ si et seulement si, pour tout $\sigma \in \{0,1\}^{X \setminus Z}$, $f(\tau \cup \sigma) = f(\tau' \cup \sigma)$.

Question V.2.

a. Montrez que $\equiv_Z^f$ est une relation d'équivalence sur $\{0,1\}^Z$.

b. Soit π un ordre sur X et D un π-DDBO représentant f. Soit $x \in X$ et v un sommet de décision de D sur la variable x. On pose $Z = \{y \mid \pi(y) < \pi(x)\}$. Soit P_1 et P_2 deux chemins de la racine de D à v et $\tau_1, \tau_2 \in \{0,1\}^Z$ deux assignations compatibles avec P_1 et P_2 respectivement. Montrez que $\tau_1 \equiv_Z^f \tau_2$.

c. Déduisez-en que la taille de D est au moins le nombre de classes d'équivalence de $\equiv_Z^f$.

On va désormais expliciter une suite de fonctions booléennes simple qui ne peut pas être représentée par des DDBO de taille polynomiale. Pour cela, nous allons considérer des suites de fonctions booléennes reconnaissant certaines matrices à valeurs booléennes.

Pour un entier n strictement positif, on note M_n l'ensemble des variables $\{m_{i,j}\}_{i,j \in [n]^2}$. On associe à toute assignation τ des variables de M_n une matrice A_τ de taille $n \times n$ telle que $A_\tau[i,j] = \tau(m_{i,j})$. Soit LIGNE_n la fonction booléenne sur les variables M_n telle que $\mathsf{LIGNE}_n(\tau) = 1$ si et seulement si A_τ contient une ligne de 1. On note COL_n la fonction booléenne sur les variables M_n telle que $\mathsf{COL}_n(\tau) = 1$ si et seulement si A_τ contient une colonne de 1.

Question V.3. Prouvez que pour un ordre π_n sur M_n bien choisi que vous expliciterez, il existe un π-DDBO de taille αn^2 représentant LIGNE_n où α est une constante qui ne dépend pas de n.

Soit $Z \subseteq M_n$ et $i \leqslant n$. On dit que la ligne i est *mélangée* dans Z s'il existe $j, k \leqslant n$ tels que $m_{i,j} \in Z$ and $m_{i,k} \notin Z$. On dit que la colonne i est *mélangée* dans Z s'il existe $j, k \leqslant n$ tels que $m_{j,i} \in Z$ and $m_{k,i} \notin Z$.

Question V.4. Soit $Z \subseteq M_n$ avec $|Z| = \left\lceil \frac{n^2}{2} \right\rceil$. On suppose que le nombre de lignes mélangées dans Z est strictement inférieur à $\frac{n}{2}$. Montrez qu'il y a au moins $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ colonnes mélangées dans Z.

Question V.5. Soit π un ordre sur M_n et soit $Z = \pi^{-1}(\lceil n^2/2 \rceil)$. Montrez que $\mathsf{LIGNE}_n \vee \mathsf{COL}_n$ a au moins $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ classes d'équivalence pour $\equiv_Z$. Déduisez-en que la suite de fonctions $(\mathsf{LIGNE}_n \vee \mathsf{COL}_n)_{n \geqslant 1}$ ne peut pas être représentée par des DDBO de taille polynomiale.

Partie VI

Cette partie traite d'une généralisation des diagrammes de décision binaires ordonnés : les diagrammes de décision à lecture unique.

Un sommet u d'un diagramme est appelé un *sommet non-déterministe* si son étiquette est $\vee$ et que toutes les arêtes sortant de u sont étiquetées par 1. Un sommet non-déterministe peut avoir un degré (entrant et sortant) quelconque.

Soit X un ensemble de variables. Un *diagramme de décision à lecture unique* G sur les variables X est un diagramme $G = (V, E, X \cup \{\vee\}, \ell)$ tels que :

— Tous les sommets de G sont soit des sommets de décision, soit des sommets terminaux, soit des sommets non-déterministes.

— Si v, w sont deux sommets de décision sur les variables x et y respectivement et qu'il existe un chemin de v à w dans G alors on a $x \neq y$.

Soit $P = (v_1, \ldots, v_k)$ un chemin dans G. On définit $X_P = \{\ell(v_i) \mid i \leqslant k\} \cap X$ l'ensemble des variables qui apparaissent comme les étiquettes d'un sommet de décision appartenant à P. Soit $Z \supseteq X_P$ et $\tau \in \{0,1\}^Z$. On dit que τ est *compatible* avec P si, pour tout $i \leqslant k$ tel que v_i est un sommet de décision, on a $\tau(\ell(v_i)) = \ell((v_i, v_{i+1}))$.

On dit que G *accepte* $\tau \in \{0,1\}^X$ s'il existe un chemin dans G compatible avec τ qui va de la racine de G vers un sommet terminal étiqueté par 1. La fonction booléenne $f_G : \{0,1\}^X \to \{0,1\}$ représentée par G est définie par $f_G(\tau) = 1$ si et seulement G accepte τ.

La *taille* de G, notée $|G|$, est le nombre de sommets de décision plus le nombre de sommets non-déterministes qu'il contient.

Un DDLU est dit *déterministe* s'il ne contient pas de sommet non-déterministe.

Question VI.1.

a. Parmi les diagrammes de la figure 2, indiquez quels sont les diagrammes qui sont des DDLU.

b. Expliquez pourquoi, si G est un DDBO, alors G est un DDLU déterministe.

Question VI.2. On reprend ici les notations introduites à la partie V. Soit $n \geqslant 1$ et s une variable telle que $s \notin M_n$.

a. Montrez que la fonction $(s \wedge \mathsf{COL}_n) \vee (\neg s \wedge \mathsf{LIGNE}_n)$ peut être représentée par un DDLU déterministe de taille $\leqslant \alpha n^2$ pour une constante α qui ne dépend pas de n.

b. Montrez que la fonction $(\mathsf{LIGNE}_n \vee \mathsf{COL}_n)$ peut être représentée par un DDLU (non-déterministe) de taille $\leqslant \alpha n^2$ pour une constante α qui ne dépend pas de n.

Question VI.3. Soit G un DDLU déterministe. Montrez qu'il existe un DDLU déterministe de taille au plus $|G|$ qui représente $\neg f_G$.

Le reste de cette partie est dédiée à montrer qu'il existe une suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ qui peut être représentée par des DDLU de taille polynomiale mais telle que la suite $(\neg f_n)_{n\geqslant 1}$ n'est pas représentable par des DDLU de taille polynomiale.

Un *graphe non-orienté* $H = (S, A)$ est la donnée d'un ensemble fini S de sommets et d'un ensemble d'arêtes $A \subseteq \{\{x, y\} \in S^2 \mid x \neq y\}$. Étant donné $x \in S$, le degré $d(x)$ de x dans H est défini par $d(x) = |\{e \in A \mid x \in A\}|$. Le degré de H, $d(H)$ est défini par $\max_{x \in S} d(x)$.

Dans cette partie, on fixe un graphe $H = (S, A)$. On note g_H la fonction booléenne sur les variables S définie par $g_H(\tau) = 1$ si et seulement si, pour tout $\{x, y\} \in A$, $\tau(x) = 1$ ou $\tau(y) = 1$.

Question VI.4. Montrez qu'il existe un DDLU (non-déterministe) de taille au plus $2|A|+1$ représentant $\neg g_H$.

Soit (X, Y) une partition de S. Un *rectangle* r pour (X, Y) est une fonction booléenne sur les variables S telle que pour tout $\tau, \tau' \in \{0,1\}^S$, si $r(\tau) = r(\tau') = 1$ alors $r(\tau'') = 1$ où τ'' est définie par

$$\tau''(x) = \begin{cases} \tau(x) \text{ si } x \in X, \\ \tau'(x) \text{ sinon.} \end{cases}$$

Question VI.5. Soient (X, Y) une partition de S, $x_1, \ldots, x_k$ des éléments distincts de X et $y_1, \ldots, y_k$ des éléments distincts de Y tels que $\{x_i, y_i\} \in A$ pour tout $i \leqslant k$. Soit r un rectangle pour (X, Y) tel que $r^{-1}(1) \subseteq g_H^{-1}(1)$.

Montrez qu'il existe un ensemble $S_1 \subseteq S$ tel que $|S_1| = k$ et pour tout $\tau \in r^{-1}(1)$, $S_1 \subseteq \tau^{-1}(1)$.

Question VI.6. Soient $S_0, S_1 \subseteq S$ deux ensembles disjoints non-vides et soit $x \in S_1$. On note

$$T(S_0, S_1) = \{\tau \ \in \{0,1\}^X \mid g_H(\tau) = 1, S_0 \subseteq \tau^{-1}(0), S_1 \subseteq \tau^{-1}(1)\}.$$

a. Montrez que $|T(S_0, S_1 \setminus \{x\})| = |T(S_0, S_1)| + |T(S_0 \cup \{x\}, S_1 \setminus \{x\})|$.

b. On note $N_x = \{y \in S \mid \{x, y\} \in A\}$ l'ensemble des voisins de x dans H. Soit $\theta_x \colon T(S_0, S_1) \to \{0,1\}^X \times \mathcal{P}(N_x)$ l'application définie par $\theta_x(\tau) = (\tau', \tau^{-1}(1) \cap N_x)$ où

$$\tau'(y) = \begin{cases} 1 \text{ si } y \in N_x \\ 0 \text{ si } y = x \\ \tau(y) \text{ sinon.} \end{cases}$$

Montrez que θ_x est injective et à valeurs dans $T(S_0 \cup \{x\}, S_1 \setminus \{x\}) \times \mathcal{P}(N_x)$.

c. Déduisez-en que $|T(\emptyset, S_1)| \leqslant (1 + 2^{-d(H)})^{-|S_1|} \times |g_H^{-1}(1)|$.

Question VI.7. Soit $G = (V, E, S \cup \{\vee\}, \ell)$ un DDLU sur les variables S et $v \in V$. On note X_v l'ensemble des variables $x \in S$ tel qu'il existe un chemin P de la racine de G à v contenant un sommet de décision w avec $x = \ell(w)$. On note Y_v l'ensemble des variables $y \in S$ tel qu'il existe un chemin P de v vers un sommet terminal contenant un sommet de décision w avec $x = \ell(w)$.

a. Montrez que $X_v \cap Y_v = \emptyset$.

b. Soit (X, Y) une partition de S telle que $X_v \subseteq X$ et $Y_v \subseteq Y$. Soit r_v la fonction booléenne à variables dans S définie par $r_v(\tau) = 1$ si et seulement s'il existe un chemin P de la racine de G à un sommet terminal étiqueté par 1 compatible avec τ et passant par v. Montrez que r_v est un rectangle sur (X, Y) tel que $r_v^{-1}(1) \subseteq f_G^{-1}(1)$.

c. Déduisez-en qu'il existe $r_1, \ldots, r_p$ vérifiant :
   - pour tout i, r_i est un rectangle sur une partition (X_i, Y_i) de S avec $|X_i| = \left\lceil \frac{|S|}{2} \right\rceil$;
   - $p \leqslant |G|$;
   - $f_G^{-1}(1) = \bigcup_{i=1}^{p} r_i^{-1}(1)$.

Question VI.8. Soit $H_n = (S_n, A_n)$ le graphe donc les sommets sont $\{x_{i,j}\}_{i,j \in [n]^2}$ et les arêtes $A_n = \{\{x_{i,j}, x_{i,j+1}\} \mid i \in [n], j \in [n-1]\} \cup \{\{x_{i,j}, x_{i+1,j}\} \mid i \in [n-1], j \in [n]\}$.

a. Soit $X \subseteq S_n$ tel que $|X| = \lceil n^2/2 \rceil$. Soit $k = \lfloor n/2 \rfloor$. Montrez qu'il existe $x_1, \ldots, x_k \in X$ et $y_1, \ldots, y_k \in S \setminus X$, tous distincts et tels que $\{x_i, y_i\} \in A_n$ pour tout $i \leqslant k$.

b. Montrez que tout DDLU G représentant g_{H_n} a une taille d'au moins $(1 + 2^{-4})^{\lfloor n/2 \rfloor}$. Déduisez-en que $(g_{H_n})_{n \geqslant 1}$ ne peut pas être représentée par des DDLU de taille polynomiale.

Fin du sujet.