RAPPORT DE L'ÉPREUVE ÉCRITE D'INFORMATIQUE-MATHÉMATIQUES
FILIÈRE MP – CONCOURS INFO – SESSION 2019
ÉCOLES CONCERNÉES : ENS DE LYON, ENS DE PARIS, ENS DE PARIS SACLAY, ENS DE RENNES

Coefficients (en pourcentage du total d'admission) :	**ULM**	**groupe I : 13,3%**
	LYON	**groupe I : 11,3%**
	PARIS-SACLAY	**groupe I : 13,2%**
	RENNES	**groupe I : 8,6%**

MEMBRES DE JURY : D. BAELDE, F. CAPELLI & A. SAURIN

L'épreuve écrite d'informatique-mathématiques concerne les candidats aux quatre Écoles Normales Supérieures sur le concours INFO. Le nombre de candidats ayant composé était de 415 pour la session 2019 (pour 483 inscrits) contre 409 en 2018. Les notes se sont échelonnées de 0 à 20 avec une moyenne de 9,2 et un écart-type de 4,3.

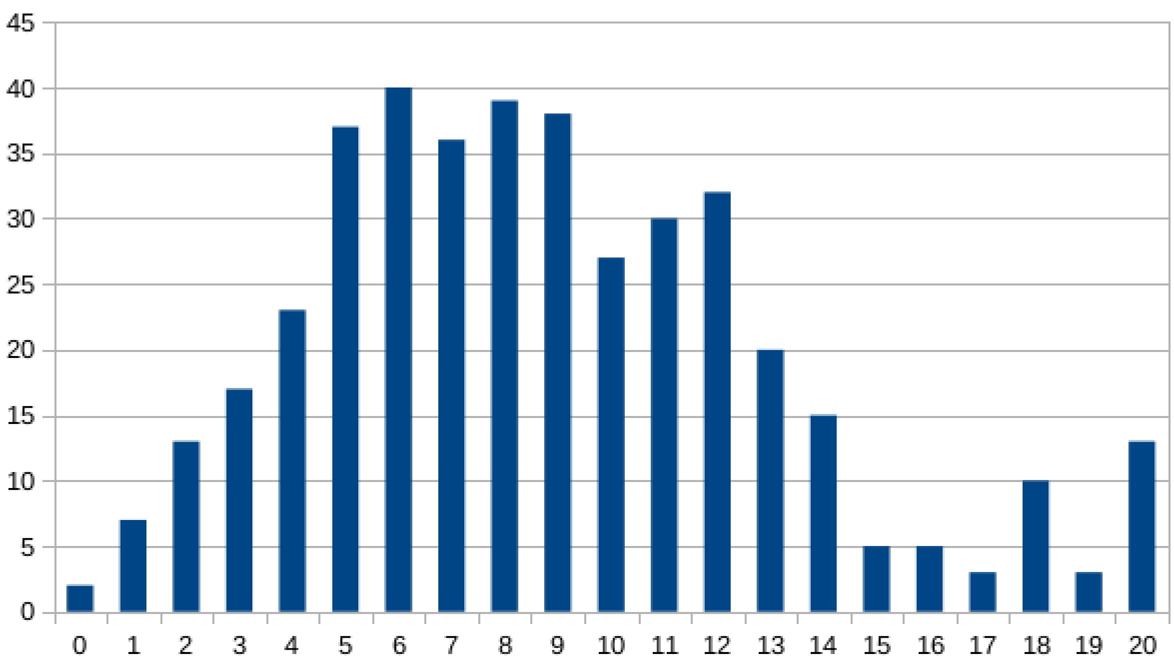

FIGURE 1 – Nombre de copies dans $[n;n+1[$.

1 L'épreuve

Afin de comparer la réussite à des questions indépendamment de leurs poids respectifs, les moyennes par question sont données ci-dessous sous la forme $n \times p$ où n est le nombre de points (poids) attribué à la question et p est donc la moyenne sur 1.

Le sujet 2019 portait sur un jeu de capture opposant une équipe de gendarmes et un voleur, se déplaçant sur un graphe :

— La partie I introduisait les notions nécessaires de théorie des graphes et l'implémentation des graphes utilisées dans le sujet et consistait en deux questions de code, utiles pour la partie III.

— La partie II définissait formellement le jeu des gendarmes et du voleur : les questions visaient à familiariser les candidats avec les notions du sujets et à établir les premiers résultats sur le jeu et notamment sur le nombre de gendarmes nécessaire ou suffisant pour que les gendarmes soient assurés de gagner le jeu sur certains graphes.

— La partie III se concentrait sur le cas d'un unique gendarme et consistait à caractériser les graphes où un gendarme seul possède une stratégie gagnante et à implémenter une fonction de test de l'existence d'une stratégie gagnante.

— La partie IV étudiait le cas particulier des graphes planaires extérieurs et demandait de démontrer que, pour cette classe de graphes, deux gendarmes possèdent toujours une stratégie gagnante.

— La partie V, enfin, étudiait le cas général et proposait de montrer qu'il existe des graphes nécessitant un nombre de gendarmes arbitrairement grand pour leur garantir l'existence d'une stratégie gagnante.

Plus précisément :

La partie I contenait deux questions de code : il s'agissait d'abord de vérifier la bonne formation de graphes non dirigés représentés comme des listes d'adjacence de type `(int * int list) list`, puis d'implémenter la suppression d'un sommet dans de tels graphes. Ces deux fonctions étaient reprises dans la partie III du sujet. La première question nécessitait de découper le problème en fonctions auxiliaires et de nombreuses erreurs étaient possibles ; une solution parfaite (sur le fond) était exigée, ce qui explique de très mauvais résultats.

La partie II permettait aux candidats de se familiariser avec le jeu considéré. Sur les questions 1 à 3, les candidats devaient montrer l'existence de stratégies gagnantes (pour le voleur, pour un ou deux gendarmes…) sur quelques exemples de petits graphes (cycles, arbres, graphe de Peterson…) La question 4 demandait le plus petit graphe où le voleur a une stratégie gagnante contre un gendarme. Les questions 5 et 6 demandaient des raisonnements simples, pour montrer que tout graphe admet un *copnumber* (le plus petit k tel que k gendarmes gagnent) et pour dériver le *copnumber* d'un graphe à partir de ceux de ses composantes connexes. Dans l'ensemble cette partie a été bien comprise, mais les candidats semblent y avoir généralement passé trop de temps, et la rédaction a souvent été trop informelle du fait de la simplicité des questions et de la nature intuitive et graphique du problème et de (trop) fréquentes erreurs de raisonnement grossières ont été relevées.

La partie III traitait le cas où il n'y a qu'un gendarme.

— Les trois premières questions demandaient de montrer l'existence de stratégies gagnantes pour le voleur dans des cas de plus en plus complexes : sur un graphe biparti de degré [1] au moins 2 ; sur un graphe non complet où tous les sommets ont même degré ; sur un graphe qui admet un rétract sur lequel le voleur a une stratégie gagnante. Les statistiques reflètent la difficulté croissante, avec des moyennes de 1×0.56, 2×0.23 et 2×0.18 respectivement.

1. Ici, le degré d'un sommet est le nombre de ses voisins, et le degré d'un graphe est le minimum du degré de ses sommets.

— Les questions 4 à 6 établissent l'équivalence entre l'existence d'une stratégie gagnante pour le voleur sur un graphe G et sur le graphe obtenu à partir de G en supprimant successivement tous les écueils [2]. La question 5 était ici la plus délicate ; elle a rapporté en moyenne 2×0.19 points.
— Les questions 7 à 9 mettaient en application le précédent résultat : la question 7 l'appliquait sur un exemple tandis que les questions 8 et 9 demandaient d'implémenter la méthode. La question 8 a été peu réussie, pour les mêmes raisons que la question I.1.

La partie IV portait sur le cas à deux gendarmes sur des graphes planaires extérieurs (GPE).

— Les deux premières questions demandaient de montrer la 3-coloriabilité de tels graphes, en admettant le théorème des quatre couleurs ; le raisonnement était relativement simple et les questions ont été bien réussies.
— Les questions 3 et 4 montraient le même résultat sans s'appuyer sur le théorème des quatre couleurs, mais en établissant et en exploitant le fait qu'un GPE admet toujours un sommet de degré au plus deux.
— Les notions de point d'articulation et de biconnexité étaient ensuite introduites, et leur compréhension était testée sur des exemples en question 5. La question 6 demandait de montrer qu'un GPE est biconnexe si, et seulement si, ses sommets consécutifs sont adjacents dans toute représentation planaire extérieure. Un gros quart des candidats s'est essayé à ce problème, avec un résultat moyen de 3×0.5 : une partie des points pouvait encore être obtenue avec un raisonnement approximatif. Les questions 7 et 8 demandait d'établir que pour tout GPE, deux gendarmes possèdent une stratégie gagnante : la question 7 dans le cas des GPE biconnexes et la question 8 dans le cas générale. Sur ces questions difficiles il fallait vraiment avoir une idée non triviale ; seulement 25 candidats ont traité la question 7, pour un résultat moyen de 2×0.62. La question 8, très difficile et traitée seulement par 3 copies avec une moyenne de 2×0.33.

La partie V établissait quelques résultats sur le cas à plusieurs gendarmes, notamment qu'il existe des graphes connexes de copnumber arbitrairement grand. Elle a été très peu traitée : si l'on omet les questions de compréhension, traitées dans plus de 30 copies et qui n'ont pas rapporté de points quand elles étaient traitées seules, seulement quatre copies obtiennent des points sur les questions au delà de 3.

— Les questions 1 et 2 établissaient des propriétés sur le cardinal des ensembles dominants dans des graphes sans 3- ni 4-cycles. Ces questions élémentaires ont été peu et mal traitées avec, de façon surprenante, de nombreux raisonnements incorrects sur les ensembles, leurs différences et leurs cardinaux. La question 3 synthétisait cela en un résultat simple : pour les graphes sans 3- ni 4-cycles, le copnumber est supérieur au degré.
— Ensuite, la notion de plan projectif fini était introduite, sa compréhension était testée en question 4, et la question 5 demandait de construire un graphe sans 3- ni 4-cycle assez grand à partir d'un plan projectif assez grand (dont on admettait que l'existence était garantie). Ces deux questions étaient notées simultanément, pour ne pas encourager le grappillage de points sur la question de compréhension à ce point d'avancement du sujet. Seulement deux copies réussissent la construction demandée.
— Les questions 6, 7 et 8 proposent enfin d'établir le même résultat sans passer par les plans

2. Un écueil est un sommet dominé par un autre, i.e. tel que si le voleur est sur le premier sommet et le gendarme sur le second, alors le gendarme gagne.

projectifs et les résultats admis à leur sujet. Les questions 6 et 7 consistaient en des vérifications visant à mettre les candidats sur la voie pour la question 8 : la première demandait simplement de vérifier que le cycle de taille 5 est sans 3- ni 4-cycles et est 3-coloriable tandis que la suivante demandait la même chose pour un graphe plus gros construit à partir du précédent. La question 8 demandait aux candidats de généraliser la construction des questions précédentes pour conclure. Encore une fois, nous n'avons pas accordé de points pour les questions 6 et 7. La question 8 a souvent été traitée sans que les candidats dégagent une structure généralisable, ce qui ne leur a pas valu de points : seules deux copies obtiennent des points ici.

2 Commentaires généraux

Le jury a apprécié le niveau général des copies et a notamment été très impressionné par les meilleures copies de l'épreuve.

Le sujet était long, peut-être un peu surprenant, les parties IV et V étant nettement plus difficiles que les trois premières. Chaque partie débutait cependant par des questions relativement faciles. Il n'était pas attendu, ni nécessaire, d'avoir résolu l'ensemble du sujet pour obtenir la note maximale. (Voir le décompte des points qu'il était possible d'obtenir sur chaque partie.)

Il faut cependant souligner quelques problèmes et erreurs observés de manière récurrente :

— Le jury a trop souvent eu à regretter le manque de rigueur et de clarté dans la rédaction des preuves. Le jury attendait des justifications précises et convaincantes, ce que l'énoncé du sujet explicitait ; il ne les a pas systématiquement trouvées, loin s'en faut.

— Le jury a été surpris de la difficulté manifeste d'un grand nombre de copies à étudier de manière systématique une classe de graphes ainsi que de l'incapacité de la quasi-totalité des copies à exploiter les plans projectifs pour construire les graphes bipartis attendus dans l'énoncé. Si la question nécessitait d'assimiler rapidement un objet mathématique introduit dans le sujet, la modélisation par des graphes était pour sa part classique et fortement suggérée par l'énoncé.

— Enfin, concernant les questions de programmation, le jury a regretté que, trop souvent, le manque de structuration et d'organisation du code conduise à des erreurs facilement évitables. Les copies ayant fait le choix d'un style de programmation impératif ont été peu inspirées, ce choix étant particulièrement peu adapté aux structures de données de l'énoncé et aux problèmes à résoudre. Ajouté à une rédaction trop imprécise, il était difficile d'aboutir à un programme correct. L'explication et le commentaire d'un code est toujours utile, aussi bien pour la personne qui l'écrit que pour celle qui le relit (ou le corrige). Les recommandations du rapport de l'épreuve 2017 concernant les questions de programmation restent valables.

3 Commentaires détaillés

Ci-dessous nous donnons pour chaque question le nombre de points associés, puis :
- le nombre de copies ayant reçu des points pour cette question (c'est à dire le nombre de copies où la question a été traitée et non nulle) ;
- la moyenne **sur 1** de toutes les copies ayant reçu des points sur la question ;
- la moyenne **sur 1** de toutes les copies sur la question.

Pour chaque partie on donne le nombre total de points qui pouvaient être obtenus, puis la moyenne et l'écart type des points obtenus.

Partie I (1,5pts | moy 0,56 stdev 0,49)

▷ **Question 1. [1 pt | 91 / 1 / 0.22]** Cette question demandait de fournir une fonction Caml `est_graphe: graphe -> bool` qui vérifie que son entrée représente un graphe au sens de la spécification donnée dans l'énoncé. L'objectif de cette question était de faire travailler les candidats sur la notion de représentation d'un graphe en Caml et de préparer les questions de code venant plus loin dans le sujet.

La question ne présentait pas de difficulté si elle était prise méthodiquement et si les candidats décomposaient la question en fonctions auxiliaires élémentaires. Les principales erreurs provenaient :
- d'un manque de structure du code (copies vérifiant toutes les propriétés à la fois ou code impératif non structuré et sans commentaire rendant difficile l'absence d'erreur et la tâche des correcteurs) ;
- de l'oubli de la vérification d'une des propriétés (par exemple de supposer que les sommets n'apparaissent qu'une fois dans la liste d'adjacence) ;
- de la mauvaise vérification d'une des propriétés de la spécification de l'énoncé (par exemple une vérification erronée du caractère non orienté du graphe).

Cette question était notée de manière binaire, tout à rien, expliquant la faible proportion des copies à avoir eu des points.

▷ **Question 2. [0,5 pt | 333 / 0.85 / 0.68]** Cette question demandait de donner une fonction Caml `retire_sommet: graphe -> sommet -> graphe` qui, étant donnés un graphe et un sommet, retourne un graphe obtenu en retirant le sommet du graphe.

Le jury n'a pas exigé que les copies vérifient que l'entrée représente bien un graphe en utilisant la question précédente. Les principales erreurs provenaient de l'oubli du retrait des arêtes (des copies se contentant de retirer le sommet de la liste principale) ou de l'oubli du retrait du sommet dans certaines listes d'adjacence.

Partie II (4,5pts | moy 3,14 stdev 1,06)

▷ **Question 1. [0,5 pt | 379 / 0.91 / 0.83]** La question, qui demandait de montrer que le voleur avait une stratégie gagnante sur le cycle de longueur 5, n'a pas posé de grand difficulté et la principale source de perte de points résidait dans l'oubli de l'initialisation de la stratégie (on donnait alors la moitié des points), sauf pour quelques (rares) copies distraites qui ont confondu le graphe C_5 avec le graphe de Peterson.

▷ **Question 2. [0,5 pt | 251 / 1 / 0.6]** La question, qui visait encore à faire assimiler les règles du jeu et à conduire vers la notion de stratégie, demandait de poursuivre une partie donnée dans l'énoncé de manière à montrer que les gendarmes pouvait forcer la capture à partir de cette position, en suivant un format donné dans l'énoncé. Une stratégie optimale était attendue : lorsque la solution proposée n'était pas optimale, elle était donc considérée comme erronée.

Une erreur qui a surpris le jury consistait à ne faire se déplacer qu'un gendarme à la fois.

▷ **Question 3. [0,25 pt | 401 / 0.64 / 0.62]** La question demandait de donner et de justifier quel joueur avait une stratégie gagnante en fonction du nombre de gendarmes pour trois exemples de graphes.

Des justifications erronnées ou trop vagues (oubli de l'initialisation, absence de prise en compte de certains comportement de l'opposant pour justifier une stratégie gagnante, etc.) ont fait perdre des points à cette question dans l'ensemble correctement traitée. Pour l'arbre le jury attendait au moins une justification argumentant qu'un unique gendarme pouvait circonscrire le voleur à une région de plus en plus petite, en raisonnant sur les sous-arbres ou simplement sur l'acyclicité.

▷ **Question 4. [0,5 pt | 389 / 0.72 / 0.68]** La question demandait d'exhiber un graphe connexe de taille minimale pour lequel un gendarme seul ne suffit pas à avoir une stratégie gagnante une stratégie gagnante : il était donc attendu qu'il soit établi que (i) le cycle de longueur 4 appartient à $\mathscr{R}_1$ et (ii) que la minimalité soit justifiée (avec une justification structurelle – nécessité d'un cycle et minimalité de C_4 – ou par l'étude des graphes plus petits).

La première partie a généralement été bien traitée, mais la minimalité a souvent posé problème lorsque les copies énuméraient les *petits* graphes en oubliant des (classes de) configurations.

▷ **Question 5. [1 pt | 327 / 1 / 0.79]** La question demandait de montrer que pour tout graphe il existe un certain entier k tel que k gendarmes suffisent à capturer le voleur, permet de justifier l'existence du copnumber de tout graphe, nombre minimal de gendarmes nécessaire pour que les gendarmes aient une stratégie gagnante.

Si la question a été globalement bien traitée, le jury a été surpris, au vu de la simplicité de la question, du nombre d'erreurs (copies plaçant des gendarmes sur tous les sommets sauf un, i.e. oubliant le cas où tous les sommets sont isolés, ou copies argumentant sur le degré maximal du graphe).

▷ **Question 6. [1,75 pt | 353 / 0.77 / 0.65]** La question demandait d'exprimer le copnumber d'un graphe non-connexe en fonction de ceux de ses composantes connexes, permettant de se consacrer, dans la suite du sujet, aux graphes connexes. Il fallait montrer qu'un nombre de gendarmes égal à la somme des copnumbers des composantes connexes était à la fois nécessaire et suffisant ; ce qui n'a pas toujours été le cas. Un nombre significatif de copies a également proposé des réponses farfelues. (Le copnumber étant parfois le max des copnumbers des composantes connexes, parfois le nombre de composantes connexes elles-mêmes.)

Partie III (11,5 pts | moy 3,46 stdev 2,31)

▷ **Question 1. [1 pt | 316 / 0.72 / 0.55]** La première question de la partie III demandait de montrer que dans un graphe biparti de degré au moins 2, un voleur a une stratégie gagnante face à un unique gendarme. Il fallait justifier que le voleur a toujours une position initiale où il est à l'abri du gendarme et qu'après chaque coup du gendarme il peut à nouveau être à l'abri.

Au-delà de l'oubli assez fréquent de l'initialisation, les erreurs récurrentes suivantes ont été sanctionnées : certaines copies fournissaient une justification presque correcte mais ne contenant aucune référence au degré au moins 2 du graphe ; d'autres justifiaient l'existence d'une stratégie d'évasion par l'existence d'un 4-cycle. Des explications trop lapidaires comme *"il suffit que le voleur reste dans la même composante connexe que le gendarme"* étaient considérées comme insuffisantes.

Le jury n'a pas sanctionné les copies oubliant le cas où le gendarme reste sur place, lorsque le reste du raisonnement était satifaisant.

▷ **Question 2. [2 pt | 155 / 0.63 / 0.23]** La question demandait de justifier que tout graphe n-régulier non complet est dans $\mathscr{R}_1$, pour $n \geq 4$. Un quart des points de la question étaient accordés au positionnement initial du voleur, trois quart à son déplacement ultérieur.

Il s'agit de la première question véritablement discriminante du sujet (outre la première question de code du sujet) dans le sens où moins de la moitié des copies ont obtenu des points sur cette question, alors que les copies obtenant des points avaient en moyenne les 2/3 des points de la question. Les raisonnements erronés ont été nombreux.

▷ **Question 3. [2 pt | 106 / 0.64 / 0.16]** La question demandait de montrer que le fait d'avoir une stratégie gagnante pour les gendarmes est préservée par rétract, en montrant préalablement que si le voleur a une stratégie gagnante dans un rétract de G, il peut s'enfuir dans G. Une description précise de la stratégie d'évasion du voleur, dans le formalisme du sujet, était attendue.

La solution reposait sur le fait de montrer que le voleur a une stratégie gagnante sur le graphe G qui reste dans l'image de la rétraction, en jouant intuitivement la composée de sa stratégie gagnante sur le rétract avec la rétraction elle-même. Parmi les erreurs principales, on relèvera le fait de ne pas justifier que le voleur peut rester dans l'image de la rétraction, ou le fait de ne produire qu'un stratégie partielle, qui ne réponde pas à tous les coups des gendarmes.

▷ **Question 4. [1 pt | 223 / 0.82 / 0.44]** La question vise à montrer qu'un voleur peut toujours s'enfuir face à un unique gendarme dans un graphe sans écueil ayant au moins deux sommets. Il s'agissait de montrer qu'en l'absence d'écueil, le voleur peut construire une stratégie où il maintient toujours une distance au moins égale à deux avec le gendarme à l'issue de son tour. La question a été assez bien réussie par les copies ayant fourni une réponse, même si l'indication du sujet n'a pas toujours été utilisée à bon escient. Par ailleurs, il a fréquement été oublié de vérifier qu'on peut se restreindre à la situation proposée dans l'énoncé (une partie de longueur au moins trois).

▷ **Question 5. [2 pt | 144 / 0.53 / 0.19]** La question demandait de montrer que l'ensemble de graphes $\mathscr{C}_1$ est stable par retrait ou ajout d'écueil. La préservation par retrait d'écueil est une application de la question 3.3 tandis que l'autre sens revenait à étendre une stratégie gagnante au graphe avec un écueil de plus.

Parmi les erreurs récurrentes, on a vu des copies qui étendaient la stratégie au graphe ayant un écueil e de plus, dominé par le sommet d, mais qui oubliaient d'ajouter le cas de capture – pourtant trivial – lorsque le gendarme est en d et le voleur dans l'écueil et qui différenciait notamment ce raisonnement de la question 3.3.

▷ **Question 6. [0.5 pt | 174 / 1 / 0.42]** La question demandait de montrer qu'on peut caractériser les graphes de $\mathscr{C}_1$ comme les graphes qui se réduisent à un graphe singleton par le retrait d'écueil. Les principales erreurs ayant causé des pertes de points sont : (i) l'absence de raisonnement suffisamment précis, du type récurrence, (ii) l'absence de référence aux résultats des questions précédentes et enfin, plus ponctuellement (iii) l'oubli que le retrait d'un écueil peut créer un nouvel écueil, la copie se limitant à retirer les écueils présents dans le graphe de départ.

▷ **Question 7. [0.5 pt | 273 / 1 / 0.66]** Il s'agissait ici d'appliquer la question précédente à un exemple de graphe, ce qui ne présentait pas de difficulté même si certaines copies se sont trompées dans l'identification des écueils. On attendait que les écueils retirés soient explicités et qu'ils soient ordonnés, au moins par groupe d'écueils indépendants.

▷ **Question 8. [1.5 pt | 55 / 1 / 0.13]** La question demandait de définir une fonction Caml `retire_ecueil: graphe -> (graphe * bool)`, prenant en entrée un graphe et retournant un graphe dans lequel un écueil a été retiré si un tel écueil existe, ainsi qu'un booléen pour préciser si un écueil a été trouvé. Les principales erreurs portaient sur (i) les tests d'inclusions de liste pour déterminer si un sommet est dominé par un autre et (ii) sur la confuction entre le graphe complet et le graphe restant à parcourir.

▷ **Question 9. [1 pt | 236 / 1 / 0.57]** La question demandait une fonction Caml `is_G1: graphe -> bool`, qui prend en entrée un graphe et retourne un booléen vrai si, et seulement si, l'entrée est dans $\mathscr{C}_1$. Environ 10% des copies ont traité cette question sans avoir abordé la précédente. Les principales erreurs ont porté sur les cas d'arrêt de la fonction.

Partie IV (12 pts | moy 1.97 stdev 2.20)

▷ **Question 1. [0.5 pt | 219 / 1 / 0.53]** La question demande d'établir une relation entre les graphes planaires extérieurs et les graphes planaires, préalable à la question suivante. Cette question ne posait pas de difficulté et a été dans l'ensemble correctement traitée. Les erreurs les plus fréquentes venaient d'une mauvaise compréhension de la relation entre graphe planaire et représentation planaire (rappelée dans le sujet) ; plusieurs copies ont par ailleurs tenté de construire des représentations planaires où les arêtes étaient des segments de droite. Enfin, certaines copies ont placé le sommet universel au centre du cercle au lieu de le placer à l'extérieur, en général sans succès (à l'exception d'un très petit nombre de copies qui modifiaient également les arcs de la représentation planaire extérieure d'une manière convaincante).

▷ **Question 2. [0.5 pt | 235 / 1 / 0.56]** La question demandait de montrer que tout graphe planaire extérieur est 3-coloriable, en admettant le théorème des quatre couleurs. Cette question ne présentait pas de difficulté : il s'agissait d'une simple application de la question précédente, après remarque que dans un coloriage, un sommet universel est nécessairement d'une couleur différente de tous les autres sommets.

Quelques copies ont pourtant développé des raisonnements surprenants, cherchant par exemple à appliquer le théorème d'Euler-Poincaré. Une copie a entrepris de redémontrer le théorème des 4 couleurs... Enfin, certaines copies ont cherché, pour obtenir un 3-coloriage, à permuter les couleurs pour aboutir à un coloriage à valeur dans $\{1,2,3\}$, malgré la définition donnée dans l'énoncé.

▷ **Question 3. [1.5 pt | 132 / 0.75 / 0.24]** La question poursuivait l'étude des graphes planaires extérieurs en demandant de montrer que tout graphe planaire extérieur possède un sommet de degré au plus deux. L'idée est de raisonner sur une corde de longueur minimale, si le graphe possède une corde. Dans l'ensemble, la question a été plutôt bien traitée malgré des raisonnements maladroits ou mal expliqués.

▷ **Question 4. [2 pt | 88 / 1 / 0.21]** La question, qui demandait de déduire de la question précédente que tout graphe planaire extérieur est 3-coloriable, ne présentait pas grande difficulté, se prouvant par récurrence sur le nombre de sommets d'un graphe planaire extérieur en utilisant l'existence d'un sommet de degré au plus deux qui peut toujours être ajouté sans perturber le caractère 3-coloriable du graphe.

▷ **Question 5. [0.5 pt | 193 / 0.74 / 0.35]** La question visait à permettre aux candidates et candidats de se familiariser avec les notions de points d'articulation et de composantes biconnexes à partir d'exemples. L'identification des composantes biconnexes (dans le cas de l'arbre en particulier) a cependant posé beaucoup de difficultés.

▷ **Question 6. [3 pt | 112 / 0.5 / 0.14]** La question demandait de caractériser la biconnexité comme une propriété d'adjacence des sommets consécutifs dans les représentations planaires extérieures. Pour la partie non triviale de la question, il fallait partant d'un sommet non adjacent à son voisin, considérer la première corde issue de ce sommet et montrer qu'elle aboutissait à un point d'articulation, raisonnement qui n'a pas souvent été développé de manière satisfaisante.

▷ **Question 7. [2 pt | 20 / 0.64 / 0.03]** La question demandait de montrer que, dans un graphe planaire extérieur biconnexe, deux gendarmes peuvent capturer un voleur. Cette question a très rarement été bien résolue : seules quatre copies ont obtenu la totalité des points de la question et quatre autres ont obtenu les trois quarts des points, ayant dans ce cas décrit de manière satisfaisante la stratégie gagnante pour les gendarmes, mais sans parvenir à justifier de son caractère gagnant.

▷ **Question 8. [2 pt | 1 / 0.5 / 0]** La question généralisait le résultat précédent aux graphes planaires extérieurs non biconnexes. Aucune copie n'a traité de manière satisfaisante cette question. Une seule copie (qui a d'ailleurs obtenu la note maximale de l'épreuve) a obtenu des points sur la question, en identifiant le caractère acyclique des composantes biconnexe, argumentant qu'en se plaçant sur un point d'articulation on protège ainsi une zone et débutant une récurrence sur le nombre de composantes biconnexes.

Partie V (9.5pts | moy 0.17 stdev 0.70)

▷ **Question 1. [2 pt | 21 / 0.9 / 0.05]** La première question de la partie demandait d'effectuer un raisonnement de combinatoire assez simple sur les ensembles dominants. La longueur de l'épreuve commence à se sentir dans les copies dont beaucoup n'aboutissent pas, probablement par manque de temps : environ 30% des copies ayant traité cette question ont obtenu l'ensemble des points. Sur cette question comme la suivante, le jury a observé de nombreuses erreurs de raisonnement grossières sur les manipulations ensemblistes et les calculs de cardinalité.

▷ **Question 2. [2 pt | 8 / 0.94 / 0.02]** Comme la question précédente, cette question consistait essentiellement en un raisonnement ensembliste sur les voisinages de sommets, mais seules huit des 38 copies ayant traité la question ont obtenu des points.

▷ **Question 3. [0.5 pt | 27 / 0.81 / 0.05]** La question demandait d'utiliser la question précédente pour établir que, dans un graphe sans 3-cycles ni 4-cycles, il faut un nombre de gendarmes supérieur ou égal au degré du graphe pour que les gendarmes aient une stratégie gagnante. Le jury attendait une construction explicite d'une stratégie d'évasion pour le voleur si le nombre de gendarmes est inférieur au degré.

Cette question a été plutôt bien traitée : 26 des 34 copies l'ayant abordée ont obtenu plus de la moitié des points.

▷ **Question 4. [0 pt | 47 traitées]** Cette question de compréhension préalable à la question suivante, n'a pas été notée en tant que telle, mais uniquement au travers la question suivante.

▷ **Question 5. [3 pt | 2 / 0.88 / 0.004]** La question demandait de montrer qu'il existe des graphes de copnumbers arbitrairement grands en montrant l'existence de graphes $(q+1)$-réguliers sans 3-cycles ni 4-cycles pour tout entier q qui est puissance d'un nombre premier.

L'énoncé suggérait fortement d'utiliser l'existence de plan de Fano d'ordre toute puissance d'un nombre premier. La clé consistait à construire un graphe biparti dont l'une des composantes correspond aux points du plan, l'autre aux droites du plan et la relation d'adjacence coincide avec la relation d'incidence. Les axiomes des plans de Fano et le caractère biparti assurent alors qu'il n'existe ni 3-cycle ni 4-cycle et le théorème A assure de la régularité du graphe.

De nombreuses copies ont proposé une construction fausse d'un graphe à partir du plan de Fano. Seules deux copies (dont l'une ayant obtenu la note maximale à l'épreuve) ont obtenu des points à cette question.

▷ **Question 6 [0 pt | 55 traitées] et Question 7 [0 pt | 31 traitées].** Ces deux questions consistaient en de simples vérifications visant à préparer l'ultime question du sujet. Elles n'ont pas apporté de points séparément de la dernière question du sujet.

▷ **Question 8. [2 pt | 2 / 0.25 / 0.001]** L'ultime question du sujet proposait d'utiliser les deux questions précédentes pour fournir une méthode de construction de graphes n-réguliers sans 3-cycles ni 4-cycles et 3-coloriables pour n arbitrairement grand. La condition de 3-coloriabilité servait à la construction inductive, mais était inutile à la conséquence qu'il fallait déduire du résultat, à savoir l'existence (et la construction) de graphes de copnumber arbitrairement grand.

Aucune copie n'a abouti sur cette ultime question.