RAPPORT DE L'ÉPREUVE ÉCRITE D'INFORMATIQUE-MATHÉMATIQUES
FILIÈRE MP – CONCOURS INFO – SESSION 2018
ÉCOLES CONCERNÉES : ENS DE CACHAN, ENS DE LYON, ENS DE PARIS, ENS DE RENNES

Coefficients (en pourcentage du total d'admission) :	**PARIS**	**groupe I : 13,3%**
	LYON	**groupe I : 12,7%**
	CACHAN	**groupe I : 13,2%**
	RENNES	**groupe I : 8,6%**

MEMBRES DE JURY : N. AUBRUN, D. BAELDE & A. SAURIN

L'épreuve écrite d'informatique-mathématiques concerne les candidats aux quatre Écoles Normales Supérieures sur le concours INFO. Le nombre de candidats ayant composé était de 409 pour la session 2018 (pour 503 inscrits) contre 344 en 2017. Les notes se sont échelonnées de 0 à 20 avec une moyenne de 8,7 et un écart-type de 4,42.

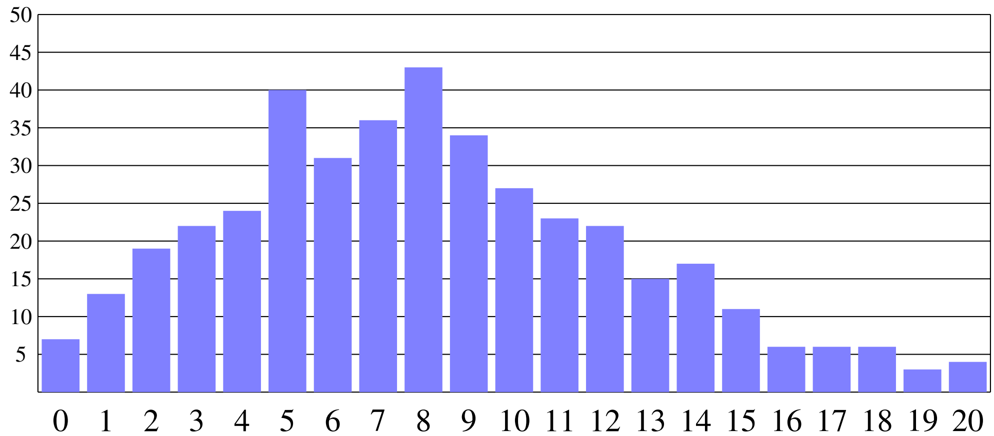

FIGURE 1 – Histogramme des notes obtenues par les candidats.

1 L'épreuve

Le sujet 2018 était un sujet mêlant topologie, combinatoire et algorithmique sur les graphes. Il proposait aux candidats d'étudier l'espace des suites bi-infinies de symboles $A^{\mathbb{Z}}$, les sous-décalages qui sont un certain type de sous-ensembles de $A^{\mathbb{Z}}$, ainsi que des applications particulières sur cet espace, les morphismes. Le sujet comportait trois parties, et menait les candidats jusqu'à l'élaboration d'algorithmes pour tester la surjectivité et la bijectivité de ces applications dans la dernière partie. L'épreuve a été notée sur 26.5 points : 11 points pour la première partie, 7.5 points pour la seconde et 8 points pour la troisième et dernière partie.

La première partie du sujet permettait aux candidats de se familiariser avec les *configurations* (mots bi-infinis) équipées d'une distance et d'une topologie associée. On introduisait ensuite les *sous-décalages*, pour lesquels on montrait l'équivalence entre deux définitions, l'une topologique (ensemble de suites bi-infinies de symboles fermé et stable par translation) et l'autre combinatoire (ensembles de suites bi-infinies de symboles qui évitent certains motifs finis). Cette partie mélangeait des questions visant à vérifier la compréhension des définitions du sujet (Questions 1, 2 et 6), des questions où l'on démontrait des résultats de topologie générale dans le contexte du sujet (Questions 3 et 7) et des questions spécifiques aux sous-décalages (Questions 4, 5, 8, 9 et 10). La moyenne pour cette partie est de 5.47 points. Sur les 11 points de la partie, 8 sont attribués à des questions où un raisonnement mathématique non trivial était attendu. Cette partie a été traitée par toutes les copies, avec $\frac{1}{3}$ d'abandon sur les dernières questions, et $\frac{2}{3}$ pour la dernière.

La seconde partie portait sur la notion de *morphisme*, une transformation des configurations générée par une fonction locale. L'injectivité ou la surjectivité des morphismes peut être difficile à appréhender. La partie commençait par des questions de compréhension, demandant si certains morphismes sont injectifs et/ou surjectifs, ce qui nécessitait déjà des constructions et raisonnements non immédiats. Ensuite, on montrait que les morphismes sont exactement les fonctions continues et commutant avec la translation, et on établissait des liens entre la surjectivité, la surjectivité locale et l'absence de *motif orphelin*. Sur les 7.5 points de la partie, 4 points vont à des question de raisonnement mathématique. Cette partie était plus courte que la précédente. Presque toutes les copies ont abordé les premières questions (compréhension sur des exemples) mais seulement $\frac{1}{3}$ a abordé les questions vraiment intéressantes.

La dernière partie, plus algorithmique, portait sur un certain type de graphes, qui permettait d'obtenir une caractérisation des morphismes bijectifs et des morphismes surjectifs. Après un exemple (un peu long) à développer en Questions 15 et 16, la partie comportait des questions algorithmiques simples (e.g. un test d'accessibilité dans un graphe) avant de demander aux candidat.e.s d'établir les caractérisations (plutôt difficile) et de les programmer (plutôt facile). La partie a été très peu traitée, probablement souvent dans la précipitation. La Question 17.1, qui demandait de programmer un test d'accessibilité, a été souvent mal traitée (confusion entre test d'accessibilité et test d'adjacence). La plupart des copies ont abordé la partie, arrêtant toutefois souvent pendant ou après la Question 15. Seulement $\frac{1}{3}$ des copies finit les questions algorithmiques préliminaires, et moins de 5% des copies ont abordé les caractérisations. Sur les 8 points de cette troisième partie, 4.5 vont à des algorithmes (dont 2 pour l'accessibilité), 1 point à un exemple, et 2.5 points au contenu théorique.

2 Commentaires généraux

Topologie de l'espace des configurations Le jury a été globalement satisfait de la manière dont les candidat.e.s ont traité la première partie. Les questions difficiles de cette partie (Questions 7, 9.2 et 10) ont joué leur rôle pour départager les candidat.e.s. Le contexte de l'énoncé (espace des configurations $A^{\mathbb{Z}}$ muni de la topologie produit) n'est pas celui du programme officiel (espaces vectoriels normés), aussi le sujet demandait de démontrer des propriétés topologiques élémentaires. Le jury a été satisfait de constater que la grande majorité des candidat.e.s l'a bien compris, et en conséquence très peu de copies utilisaient sans justification ou à tort des propriétés des espaces vectoriels normés (par exemple « un union d'ouverts est ouverte », « une application injective de $A^{\mathbb{Z}}$ dans $A^{\mathbb{Z}}$ est bijective », etc.)

Morphismes, injectivité et surjectivité Dans la deuxième partie, le sujet se concentrait sur les morphismes (applications définies par une fonction locale, ou de manière équivalente applications continues et commutant avec la translation comme montré dans la Question 12). L'injectivité et la surjectivité des morphismes ne sont pas des propriétés se lisant facilement sur la fonction locale qui les définit. Les Questions 11.1 et 11.2 demandaient aux candidat.e.s de décrypter deux exemples de morphismes. Peu de copies sont tombées dans le piège en déduisant de l'injectivité ou de la surjectivité de la fonction locale celle du morphisme. Il ne s'agit pas non plus de foncer tête baissée en essayant d'appliquer des techniques apprises pendant l'année (et inutiles dans le contexte de l'énoncé) : par exemple chercher à calculer le noyau des morphismes des questions 11.1 et 11.2 pour montrer l'injectivité ou la non-injectivité n'a pas de sens.

Algorithmique Le jury a été déçu par le traitement des questions plus algorithmiques du sujet dans la troisième partie (ces questions arrivant en fin de sujet, peut-être que le manque de temps ou la fatigue peuvent partiellement expliquer ce constat). En particulier, la question 17.1 demandait d'écrire une fonction testant l'existence d'un chemin entre deux sommets d'un graphe orienté. Les parcours de graphes étant explicitement au programme, le jury a été surpris de la proportion de copies se contentant de tester si les deux sommets sont adjacents. Il était attendu une réponse parfaite, la difficulté principale étant d'adapter l'algorithme vu en cours à la structure de données de l'énoncé.

3 Commentaires détaillés

Ci-dessous nous donnons pour chaque question le nombre de points associés, puis :
- le nombre de copies ayant reçu des points pour cette question (c'est à dire le nombre de copies où la question a été traitée et non nulle);
- la moyenne de toutes les copies ayant reçu des points sur la question;
- la moyenne de toutes les copies sur la question.

Partie I. Configurations, topologie et sous-décalages.

▷ **Question 1. [0,25 pt, 409 / 0,23 / 0,18]** Il s'agissait d'une question très simple visant à se familiariser avec les notions de motif et de cylindre. Les exemples choisis montraient la différence entre deux notions pour une configuration x et un motif p : x contient le motif p (sans condition sur l'indice auquel le motif apparaît), et x est dans le cylindre porté par p (on impose l'indice auquel le motif doit apparaître). Elle a été très bien réussie dans l'ensemble. Le jury attendait une réponse parfaite : la moindre erreur sur la question faisait perdre l'ensemble des points de la question.

▷ **Question 2. [0,25 pt, 409 / 0,22 / 0,22]** La question demandait de calculer les distances entre les trois configurations de la question précédente. Il s'agissait simplement d'appliquer la définition de la distance introduite par l'énoncé. Là encore, la moindre erreur sur la question faisait perdre l'ensemble des points de la question.

▷ **Question 3. [0,5 pt, 405 / 0,39 / 0,38]** La question montrait qu'une intersection quelconque de fermés est elle-même fermée. Le contexte de l'énoncé n'étant pas celui du programme officiel (espace vectoriel normé), une preuve complète du résultat était attendue : on ne peut pas tenir pour acquis qu'une union d'ouverts est ouverte.

La grande majorité des candidats passe au complémentaire et montre qu'une union quelconque d'ouverts est ouverte, mais certaines copies se contentent de montrer qu'une intersection de deux (ou de n) fermés est fermée : elles ont été lourdement sanctionnées. On rencontre aussi des unions dénombrables, et même indexées sur $\mathbb{R}$, ce qui ne répondait pas tout à fait à la question et ne simplifiait rien. Certaines copies font la confusion entre union et intersection : appartenir à une union implique seulement l'appartenance à l'un des ensembles de l'union. Enfin attention : considérer un rayon défini comme un infimum donne potentiellement un rayon nul, donc une boule associée vide !

▷ **Question 4. [1,5 pt, 387 / 1,20 / 1,13]** Dans cette question on montre que le cylindre $[\![p]\!]$ porté par un motif p est à la fois ouvert et fermé. La plupart des copies ont bien traité la question, en considérant la boule de rayon $m = \max\{|l|,|r|\}+1$ pour le motif $p \in A^{[l;r]}$. Les copies utilisant la boule de rayon 2^{-r} ou 2^{-r-l} ont été sanctionnées.

▷ **Question 5. [0,25 pt, 408 / 0,24 / 0,24]** La question demandait de vérifier que la translation σ est une bijection, et de donner son inverse σ^{-1}. On pouvait soit exprimer directement l'inverse σ^{-1} et vérifier que $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = Id$, ou bien vérifier directement l'injectivité puis la surjectivité de σ et définir σ^{-1}. Attention, parler du noyau de σ n'est pas pertinent ici, car il ne s'agit pas d'une application linéaire.

▷ **Question 6. [1 pt, 405 / 0,72 / 0,70]** Cette question donnait trois exemples d'ensembles de configurations, et demandait pour chacun de justifier s'il s'agissait d'un sous-décalage ou non. Les copies annonçant des réponses sans justification n'ont pas reçu de point pour cette question.

Pour X_1 il est incorrect de dire que si $x \in X_1$ alors $\sigma(x)$ n'est pas dans X_1 pour x quelconque (il faut préciser qu'au moins un symbole 0 apparaît dans x !). De même, donner une configuration x de X_1 telle que $\sigma(x)_i = 1$ avec i pair ne constitue pas un contre-exemple à l'invariance par translation !

Le jury a été satisfait de constater que beaucoup de copies pensent à utiliser la suite de configurations $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où x_n a un symbole 1 en position n, pour montrer que X_2 n'est pas fermé.

▷ **Question 7. [2 pt, 297 / 1,28 / 0,93]** Il s'agissait de la première question difficile du sujet, on montrait la compacité de l'espace des configurations $A^{\mathbb{Z}}$.

L'indication donnée par l'énoncé fournissait une idée de preuve, et la principale difficulté de la question résidait dans sa rédaction.

▷ **Question 8. [0,5 pt, 361 / 0,41 / 0,36]** Dans cette question on vérifiait que le langage $\mathcal{L}(X)$ d'un sous-décalage X est à la fois stable par translation, stable par sous-motif et prolongeable. La question ne présentait pas de difficulté particulière et a été bien traitée.

▷ **Question 9. [2,75 pt, 308 / 1,44 / 1,02]** Cette question montrait l'équivalence entre deux définitions des sous-décalages : ensemble fermé et stable par translation X et ensemble X_E où E est un ensemble de motifs interdits quelconque.

Pour la question 9.1, montrer l'invariance par translation de X_E ne comportait aucune difficulté. Pour la fermeture l'énoncé suggérait d'utiliser des cylindres pour décrire X_E. L'exercice a été correctement réussi ; une proportion non négligeable de copies écrit X_E comme intersection des complémentaires des cylindres portés par les motifs de E, ce qui est incorrect : il faut prendre l'intersection de tous les translatés de chacun de ces cylindres. On notera que certaines copies n'ont pas utilisé d'écriture à l'aide de cylindres, et ont donné une preuve directe et correcte de la fermeture en montrant que le complémentaire est ouvert.

La question 9.2 montrait que le complémentaire du langage $\overline{\mathcal{L}}$ est un ensemble motifs qui définit X. La plupart des copies montrent bien que le sous-décalage évite le complémentaire du langage ; l'inclusion réciproque est moins bien traitée. Pour cette dernière, les copies écrivant sans justification que si $x \notin X$ alors tout motif de x est dans le complémentaire de $\mathcal{L}(X)$ (ou celles qui écrivent sans justifier que si une configuration ne contient que des mots du langage de X, alors elle est dans X) n'ont pas reçu de point.

La question 9.3 était un simple exercice d'écriture sans contenu mathématique.

▷ **Question 10. [2 pt, 144 / 1,51 / 0,53]** Cette question constituait une réciproque à la question 8. Il s'agissait de montrer que si un langage $\mathcal{L}$ est à la fois stable par translation, stable par sous-motif et prolongeable, alors il existe un sous-décalage X dont le langage est $\mathcal{L}$.

Il s'agissait d'une question difficile, qui a été peu abordée par les candidat.e.s. Parmi les copies traitant la question, la plupart trouvent le bon sous-décalage à considérer : $X = X_{\overline{\mathcal{L}}}$. Peu de copies rédigent ensuite proprement la double inclusion des ensembles $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}(X)$. Le sens $\mathcal{L}(X) \subseteq \mathcal{L}$ est immédiat, mais l'inclusion réciproque demandait de construire avec soin une configuration x contenant un motif $p \in \mathcal{L}$. La configuration peut s'obtenir par extraction, en utilisant la compacité sur une suite de configuration x_n contenant chacune une extension p_n de plus en plus grande du motif p.

Partie II. Morphismes.

▷ **Question 11. [1,75 pt, 383 / 0,95 / 0,83]** Les questions 11.1 et 11.2 demandaient de montrer l'injectivité ou la non-injectivité ainsi que la surjectivité ou la non-surjectivité de deux exemples de morphismes.

Attention pour les questions 11.1 et 11.2, l'argument consistant à dire que injectivité et surjectivité sont équivalentes car les espaces de départ et d'arrivée d'un morphisme sont les mêmes est valable uniquement en dimension finie, et donc inutile pour le contexte du sujet. De la même façon, parler du noyau de Φ ou Ψ n'a pas de sens.

La question 11.3 était une question facile et a été bien traitée. Les copies écrivant une fonction locale $([1;1], Id_A)$ n'ont pas été sanctionnées, même si la définition de fonction locale donnée dans l'énoncé imposait la présence de 0 dans le voisinage.

▷ **Question 12. [2,5 pt, 319 / 1,28 / 0,65]** Dans la question 12.1, on demandait de vérifier la continuité de la translation σ.

Dans 12.2, la plupart des copies montrent correctement qu'un morphisme est continu et commute avec la translation. L'énoncé suggère d'utiliser le théorème de Heine pour montrer la réciproque. Peu de copies abordent cette partie de la question, mais le jury a été satisfait de constater que certaines définissent avec succès la fonction locale à partir de la constante d'uniforme continuité, et montrent que cette fonction locale convient.

▷ **Question 13. [0,5 pt, 236 / 0,31 / 0,18]** Dans cette question on revient sur les deux exemples de morphismes Φ et Ψ de la question 9, et on demande s'ils possèdent des motifs orphelins. La question était assez immédiate si la question 9 avait été auparavant bien traitée. Il suffisait de remarquer que Φ étant surjectif, il ne peut pas posséder de motif orphelin, et que la preuve de non-surjectivité pour Ψ fournissait un motif orphelin (en général le motif 1111).

Les copies ayant proclamé à la question 11.1 ou 11.2 la (non-)surjectivité d'un des morphismes sans le démontrer, ou avec une preuve incorrecte, n'ont pas reçu de points pour cette question. Les copies ayant bien traité la question 9 ont dans leur grande majorité bien traité cette question.

▷ **Question 14. [2,75 pt, 129 / 1,35 / 0,42]** La question 14 se décomposait en trois sous-questions. L'objectif était de montrer que la surjectivité d'un morphisme Φ est équivalente à l'absence de motifs orphelin. On transforme donc une propriété globale sur les configurations infinies (la surjectivité) en propriété sur les motifs finis (absence de motif orphelin). Sans surprise donc, cette question faisait appel à la compacité de l'espace $A^{\mathbb{Z}}$ pour déduire la propriété globale de la propriété locale (question 14.1).

Peu de copies abordent la question 14.1 et la réussissent correctement. Tous les points de la question était destinés au sens *si toutes les fonctions locales étendues sont surjectives, alors le morphisme est surjectif*, le jury ayant considéré qu'un candidat traitant le sujet avec sérieux avait déjà répondu au sens réciproque dans la question 11.

Pour la question 14.2, la plupart des candidat déduisent bien l'existence d'un motif orphelin du défaut de surjectivité de l'une des fonctions locales étendues, mais certaines copies oublient de montrer que ce motif est bien orphelin.

La question 14.3 était une question de synthèse pour clore la question 14. Il était attendu des candidats qu'ils identifient le morceau de preuve manquant, à savoir que si Φ possède un motif orphelin, alors il n'est pas surjectif (une fois ceci énoncé, la preuve est immédiate avec ce qui précède).

Partie III. Algorithmes par les graphes.

▷ **Question 15. [0,25 pt, 344 / 0,23 / 0,19]** Dans cette question, on retranscrit les règles locales du morphisme Ψ sous forme d'un graphe fini $\mathcal{G}_\Psi$. On pouvait remarquer qu'il suffisait de reprendre le graphe $\mathcal{G}_\Phi$ en exemple dans l'énoncé, et de ne modifier que les étiquettes des arêtes. Cette question ne présentait pas de difficulté particulière, et a été bien réussie par la grande majorité des copies qui l'ont abordée.

▷ **Question 16. [0,75 pt, 291 / 0,28 / 0,20]** Dans cette question on demandait de construire les graphes $\mathcal{H}_\psi$ et $\mathcal{D}_\psi$ à partir du graphe $\mathcal{G}_\Psi$ de la question précédente. Les copies ont reçu des points pour :

- la correction de la composante réflexive du graphe $\mathcal{H}_\psi$ (les arêtes entre sommets de type (u,u), qui sont indépendantes du morphisme considéré et donc les mêmes que celles du graphe $\mathcal{H}_\varphi$ de l'énoncé) ;
- une proportion suffisante d'arêtes correctes entre des sommets de type (u,u) et des sommets de type (u,v) avec $u \neq v$;
- le passage correct de $\mathcal{H}_\psi$ à $\mathcal{D}_\psi$ (élagage du graphe).

On pouvait donc obtenir tous les points à cette question même si le graphe obtenu n'était pas parfait.

▷ **Question 17. [3,5 pt, 246 / 1,23 / 0,63]** Cette question était découpée en trois sous-questions. Dans 17.1 on demandait l'écriture d'une fonction détectant la présence d'un chemin entre deux sommets donnés du graphe. Il s'agissait donc de réaliser un parcours du graphe. Le jury a été globalement déçu par les réponses proposées à cette question, même si certaines copies l'ont parfaitement réussie. Parmi les erreurs récurrentes on trouve notamment des fonctions qui testent seulement l'adjacence des deux sommets u et v, ou encore des confusions sur le type de données des graphes considérés. Ces erreurs ont été lourdement sanctionnées.

Dans 17.2 on demandait l'écriture d'une fonction testant si un sommet est isolé, fonction utilisée dans 17.3 pour calculer la version élaguée d'un graphe.

▷ **Question 18. [0,5 pt, 72 / 0,22 / 0,04]** Dans cette question on montrait que tous les sommets de la forme (w,w) sont dans la même composante fortement connexe de $\mathcal{D}_\varphi$. La question a été très peu abordée. On pouvait montrer que le graphe $\mathcal{G}_\varphi$ est lui-même fortement connexe, et qu'une arête $u \xrightarrow{a} v$ dans $\mathcal{G}_\varphi$ donne une arête de (u,u) vers (v,v) dans le graphe $\mathcal{D}_\varphi$.

▷ **Question 19. [1 pt, 21 / 0,37 / 0,02]** Dans cette question on caractérisait la bijectivité du morphisme en terme de composantes fortement connexes dans le graphe $\mathcal{D}_\varphi$. L'indication permettait de déduire l'équivalence entre injectivité et bijectivité. La question a été très peu abordée, avec un succès mitigé. Mieux valait raisonner par double implication que par équivalence comme cela a été fait dans quelques copies.

▷ **Question 20. [0,5 pt, 49 / 0,28 / 0,03]** Cette question proposait d'écrire une fonction testant la bijectivité d'un morphisme. D'après ce qui précède, il suffisait de tester si $\mathcal{D}_\varphi$ ne contient que des sommets de la forme (w,w). Une solution consistait à appeler la fonction élagage sur l'entrée, puis de chercher un sommet de la forme (u,v) avec $u \neq v$. On pouvait donc répondre avec une fonction de quelques lignes à cette question, qui a été notée en tout ou rien.

▷ **Question 21. [1 pt, 11 / 0,27 / 0,01]** De façon similaire à la Question 19, on demandait de montrer une caractérisation que la surjectivité. Le sens direct se montrait de manière très semblable à la Question 19, aussi la plupart des points s'obtenait en montrant correctement le sens réciproque. A peine quelques copies sont arrivées jusqu'à cette question, et seules deux y répondent parfaitement.

▷ **Question 22. [0,5 pt, 30 / 0,12 / 0,01]** Pour cette dernière question on demandait d'écrire une fonction qui teste la surjectivité d'un morphisme. D'après ce qui précède, pour tester si un morphisme est surjectif, il suffit de vérifier que $\overline{\mathcal{G}}_\varphi$ ne contient que des sommets de la forme (w,w). On sait que tous les sommets de la forme (w,w) sont de toute façon dans la même CFC de $\mathcal{D}_\varphi$. On peut donc par exemple vérifier que si un sommet (u,v) avec $u \neq v$ est dans $\mathcal{D}_\varphi$, et a un voisin de la forme (w,w), alors il n'y a pas de chemin de (w,w) à (u,v).